

Gráfelmélet Megoldások

- 1) a) **Döntse el az alábbi négy állítás közül melyik igaz és melyik hamis! Válaszát írja a táblázatba!** (4 pont)

A: Egy 6 pontot tartalmazó teljes gráfnak 15 éle van

B: Ha egy teljes gráfnak páros számú éle van, akkor a pontok száma is páros:

C: Ha egy 51 pontú gráfban nincs kör, akkor legfeljebb 50 éle lehet.

D: Nincs olyan 6 pontú gráf, amelyben a fokszámok összege 11.

A	B	C	D

- b) **Ha valaki sohasem hallott a gráfokról, és mégis kitölti a fenti táblázatot, akkor mekkora valószínűséggel lesz helyes mind a négy válasza?** (3 pont)

- c) **Tagadja az alábbi mondatot:**

„Nincs olyan szerelem, aki el nem múlik” (Népdalgyűjtés) (3 pont)

- d) **Fogalmazzon meg egy olyan szöveges feladatot, amelynek a megoldása így számítható ki:** $\binom{17}{2}$. (3 pont)

Megoldás:

a)

A	B	C	D
Igaz	Hamis	Igaz	Igaz

(4 pont)

- b) **Összesen $2^4 = 16$ kitöltés lehetséges.** (1 pont)

Ezek közül csak 1 helyes (1 pont)

Így a valószínűség $\frac{1}{16}$ (1 pont)

- c) *Lásd: Szöveges feladatok 30. feladat*

- d) *Lásd: Szöveges feladatok 30. feladat*

Összesen: 13 pont

- 2) a) **A következő két állításról döntse el, hogy igaz vagy hamis. Válaszait indokolja!** (6 pont)

- **Van olyan ötpontú egyszerű gráf, amelynek 11 éle van.**
- **Ha egy ötpontú egyszerű gráf minden csúcsa legalább harmadfokú, akkor biztosan van negyedfokú csúcsa is.**

- b) **Az A, B, C, D és E pontok egy ötpontú teljes gráf csúcsai. A gráf élei közül véletlenszerűen beszínezünk hatot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az A, B, C, D, E pontokból és a színezett élekből álló gráf nem lesz összefüggő?** (10 pont)

Megoldás:

- a) Az első állítás **hamis** (1 pont)

Egy ötpontú egyszerű gráfban **legfeljebb 10 él húzható.** (2 pont)

A második állítás **igaz** (1 pont)

Ha a gráf minden csúcsa harmadfokú volna, akkor a gráfban **a fokszámok összege páratlan lenne**, ami lehetetlen. (2 pont)

Összesen: 16 pont

- b) Ha úgy színeztünk be 6 élt, hogy kaptunk egy négypontú teljes részgráfot és egy izolált pontot, akkor ez a gráf nem összefüggő, tehát jó. (2 pont)
 Másképp nem kaphattunk nem összefüggő gráfot, hiszen ha egy két- és egy hárompontú komponense lenne, akkor legfeljebb 4 él lehetne. (2 pont)
 Az első típushoz ötféleképpen választhatjuk ki az izolált pontot, és ez már meghatározza a 6 beszínezhető élt, tehát az ilyen gráfok száma 5. (2 pont)
 Az öt pontú teljes gráfnak 10 éle van (1 pont)
- Ezek közül $\binom{10}{6}$ féleképpen választhatjuk ki a 6 kiszínezendő élt. (2 pont)
- A keresett valószínűség tehát $p = \frac{5}{20} \approx 0,024$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

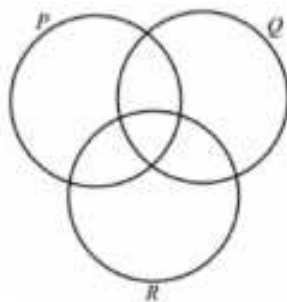
3) Tekintsük a következő, egyszerű gráfokra vonatkozó állítást:
Ha a gráf minden pontjának fokszáma legalább 2, akkor a gráf biztosan összefüggő.

- a) Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás! Válaszát indokolja! (2 pont)
- b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását! Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása! Válaszát indokolja! (4 pont)

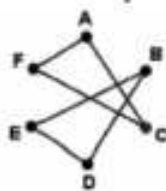
Tekintsük a következő halmazokat:

$P = \{\text{összefüggő gráfok}\}$, $Q = \{\text{egyszerű gráfok}\}$, $R = \{\text{kört tartalmazó gráfok}\}$.

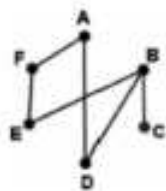
- c) Helyezze el az alábbi gráfok ábrájának sorszámát a fenti halmazábrán a megfelelő helyre! (4 pont)



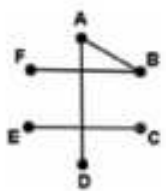
- d) Rajzoljon egy 6 pontú fagráfot az 5. ábrára és helyezze el ennek a sorszámát is a fenti halmazábrában a megfelelő helyre! (3 pont)



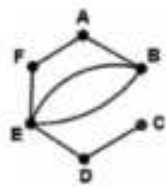
1. ábra



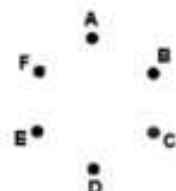
2. ábra



3. ábra



4. ábra

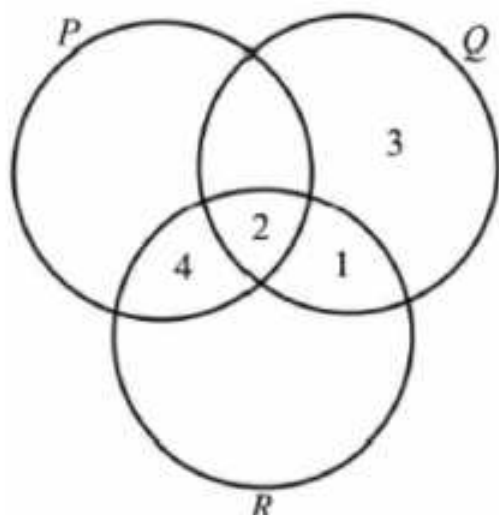


5. ábra

Megoldás:

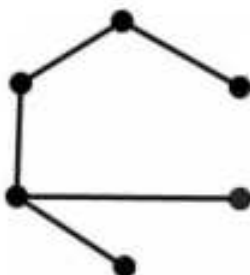
- a) Az állítás **hamis** (1 pont)
 Bármilyen jó ellenpélda, ami nem összefüggő, egyszerű gráf és minden pont fokszáma legalább 2 (1 pont)
- b) Az állítás megfordítása:
 Ha a gráf összefüggő, akkor minden pontjának fokszáma legalább 2 (2 pont)
 Az állítás **hamis** (1 pont)
 Bármilyen ellenpélda, összefüggő gráf, aminek van elsőfokú pontja. (1 pont)

A következő behelyettesítés a jó:



(1-1 pont minden jó helyre)

c) Bármilyen jó 6 pontú fa, például:



(2 pont)

Az 5-ös sorszám elhelyezése a $(P \cap Q) \setminus R$ halmazba

(1 pont)

Összesen: 13 pont

4) a) **Határozza meg az alábbi kijelentések logikai értékét (igaz-hamis)!
Válaszait indokolja!** (8 pont)

- I. **Van olyan hatpontú fagráf, amelynek minden csúcsa páratlan fokszámú**
- II. **Ha egy hétpontú egyszerű gráfnak 15 éle van, akkor a gráf összefüggő.**
- III. **Van olyan fagráf amelyben a csúcsok számának és az élek számának összege páros.**

Egy hatfős társaság tagjai A, B, C, D, E és F . Mindenkit megkérdeztünk, hogy hány ismerőse van a többiek között (az ismeretség kölcsönös). A válaszként kapott hat természetes szám szorzata 180. Az is kiderült, hogy A -nak legalább annyi ismerőse van, mint B -nek, B -nek legalább annyi ismerőse van, mint C -nek, és így tovább, E -nek legalább annyi ismerőse van, mint F -nek.

b) **Szemléltesse egy-egy gráffal a lehetséges ismeretségi rendszereket!**

(8 pont)

Megoldás:

a) Az I. állítás **igaz**. Megfelelő konstrukció (lásd az alábbi két példát) vagy szöveges indoklás. (2 pont)



A II. állításra ellenpélda az a hétpontú gráf, amelynek van egy hatpontú teljes részgráfja és egy izolált pontja. (2 pont)

A II. állítás tehát **hamis**. (1 pont)

Az n pontú gráfnak $n - 1$ éle van, (1 pont)

ezért a csúcsok és az élek számának összege $2n - 1$, ami páratlan. (1 pont)

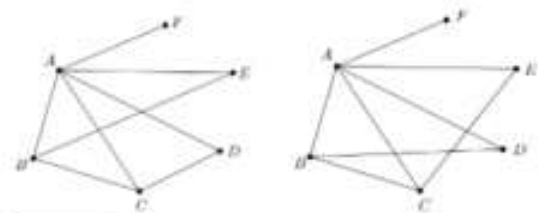
A III. állítás tehát **hamis**. (1 pont)

b) (Ha az ismeretségek száma rendre a, b, c, d, e

és f , akkor $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f = 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

(1 pont)

Mivel az ismeretségi gráfban a pontok száma legfeljebb 5 (és $a \geq b \geq c \geq d \geq e \geq f$), (1 pont)



ezért a csúcsok fokszámai a következők lehetnek (az ismeretségek számát a névsornak megfelelően rendezve): 5, 3, 3, 2, 2, 1 (1 pont)

vagy 5, 4, 3, 3, 1, 1. (1 pont)

A második esethez nem tartozik gráf, (1 pont)

mert nincs olyan gráf, amelyben a páratlan fokszámú csúcsok száma páratlan. (1 pont)

Két lehetséges ismeretségi gráf van (például azért, mert B -nek és C -nek is van ismerőse D és E között, ezért D és E nem ismerheti egymást, így D az A -n kívül vagy C -t vagy B -t ismerheti). (2 pont)

Összesen: 16 pont

5) **A H halmaz egy nyolcpontú egyszerű gráfok halmaza. A következő állítás a H elemeire vonatkozik: Ha egy (nyolcpontú egyszerű) gráf minden pontjának fokszáma legalább 3, akkor a gráf összefüggő.**

a) **Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!** (3 pont)

b) **Fogalmazza meg az állítás megfordítását a H elemeire vonatkozóan, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!** (3 pont)

Az $ABCDE$ konvex ötszög csúcsait piros, kék vagy zöld színűre színezzük úgy, hogy bármely két szomszédos csúcsa különböző színű legyen.

c) **Hány különböző színezés lehetséges? (Az ötszög csúcsait megkülönböztetjük egymástól.)** (5 pont)

Egy négypontú teljes gráf élei közül véletlenszerűen kiválasztott négy élt kiszínezzünk zöldre (teljes gráf: olyan egyszerű gráf, melynek bármely két pontja között van él.)

d) **Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a zöldre színezett élek a gráf egy négypontú körének élei!** (5 pont)

Megoldás:

a) Az állítás **hamis**. (1 pont)

Ellenpélda: a nyolcpontú egyszerű gráf két négypontú teljes gráf egyesítése. (2 pont)

b) A megfordítás: **Ha egy (nyolcpontú egyszerű) gráf összefüggő, akkor a gráf minden pontjának fokszáma legalább 3.** (1 pont)

A Zöld Iskola 8 tanulójának egymás közötti mérkőzései mindig a 8 tanuló valamelyikének győzelmével végződtek. (1 pont)

ez $\binom{8}{2} (= 28)$ győzelmet jelent. (1 pont)

- c) *Lásd: Kombinatorika 36. feladat*
d) *Lásd: Valószínűségszámítás 35. feladat*

Összesen: 16 pont

- 6) a) **Legyen G egy nyolcpontú egyszerű gráf, amelynek összesen 9 éle van. Igazolja, hogy G csúcsai között biztosan van olyan, amelynek a fokszáma legalább 3.** (4 pont)
- b) **Az A, B, C, D, E, F, G, H pontok egy szabályos nyolcszög csúcsai. Megrajzoljuk a nyolcszög oldalait és átlóit. A megrajzolt szakaszok közül véletlenszerűen kiválasztunk négyet. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy mind a négy kiválasztott szakasz az A csúcsból indul ki!** (6 pont)
- c) **Nyolc sakkozó részére egyéni bajnokságot szerveznek. Hányféleképpen készíthető el az első forduló párosítása, ha ebben a fordulóban mindenki egy mérkőzést játszik? (Két párosítást különbözőnek tekintünk, ha az egyik tartalmaz olyan mérkőzést, amelyet a másik nem.)** (6 pont)

Megoldás:

- a) Ha minden csúcs fokszáma legfeljebb 2 lenne, akkor G -nek összesen legfeljebb 8 éle lehetne. (2 pont)
Mivel G -nek 9 éle van, ezért ellentmondásra jutottunk. (1 pont)
A csúcsok között tehát van olyan, amelyiknek a fok-száma legalább 3. (Az állítást bizonyítottuk.) (1 pont)
- b) *Lásd: Valószínűségszámítás 37. feladat*
c) *Lásd: Kombinatorika 37. feladat*

Összesen 16 pont

- 7) a) **Ha $a \mid b$ igaz, akkor $a \mid b^2$ is teljesül (a és b pozitív egész számok). Fogalmazza meg a fenti (igaz) állítás megfordítását, és állapítsa meg a megfordítás logikai értékét is! Válaszát indokolja! ($a \mid b$ azt jelenti, hogy az a egész szám osztója a b egész számnak.)** (3 pont)
- a) **Hány olyan n pozitív egész szám van, amelyhez létezik olyan p (pozitív) prímszám, amelyre az $n^2 - pn$ különbség is egy (pozitív) prímszámmal egyenlő?** (7 pont)
- Egy lapra 10 pontot rajzoltunk, majd ezeket megszámoztuk 1-től 10-ig. Ezután minden egyes pontot egy-egy vonallal „összekötünk” a lapon szereplő összes olyan ponttal, amelyhez írt szám a kiválasztott ponthoz írt számnak osztója. (Például azt a pontot, amelyhez a 6-ot írtuk, összekötöttük mind a négy ponttal, amelyhez a 6 valamelyik osztóját írtuk.)
- b) **Igazolja, hogy az így kapott 10 csúcsú gráf nem egyszerű gráf!** (2 pont)
- c) **Igazolja, hogy a gráf éleinek száma páratlan!** (4 pont)

Megoldás:

- a) *Lásd: Bizonyítások 17. feladat*

- b) *Lásd: Számelmélet 7. feladat*
- c) Mivel mindegyik szám önmagának is osztója, ezért a gráf mindegyik csúcsát önmagával is „összekötöttük”. (1 pont)
A gráfban van hurokél, tehát a gráf nem egyszerű. (1 pont)
- d) Minden négyzetszámnak páratlan sok osztója van, (1 pont)
és minden nem négyzetszámnak páros sok osztója van. (1 pont)
1-től 10-ig három darab négyzetszám van (1, 4, 9). (1 pont)
- (Egy adott szám osztói legfeljebb akkorák, mint maga a szám, emiatt a lapon megadott tíz szám mindegyik osztója szerepel a lapon. Ezért) **három páratlan számot és hét páros számot kell összeadni, tehát az összekötő vonalak (élek) száma valóban páratlan.** (1 pont)
- Összesen: 16 pont**

- 8) **Egy osztály tanulói a tanév során három kiránduláson vehettek részt. Az elsők az osztály tanulóinak 60 százaléka vett részt, a másodikon 70 százalék, a harmadikon 80 százalék. Így három tanuló háromszor, a többi kétszer kirándult.**
- a) **Hány tanulója van az osztálynak?** (6 pont)
- b) **A három közül az első kiránduláson tíz tanuló körmérkőzésen asztalitenisz-bajnokságot játszott. (Ez azt jelenti, hogy a tíz tanuló közül mindenki mindenkivel pontosan egy mérkőzést vívott.) Mutassa meg, hogy 11 mérkőzés után volt olyan tanuló, aki legalább háromszor játszott!** (4 pont)
- c) **A második kirándulásra csak az osztály kosárlabdázó tanulói nem tudtak elmenni, mivel éppen mérkőzésük volt. A kosarasok átlagmagassága 182 cm, az osztály átlagmagassága 174,3 cm. Számítsa ki a kiránduláson részt vevő tanulók átlagmagasságát!** (6 pont)

Megoldás:

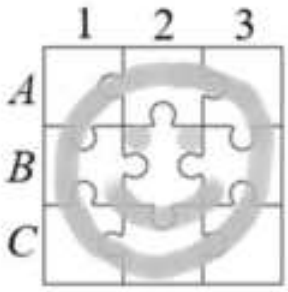
- a) *Lásd: Halmazok 6. feladat*
- b) Ha minden tanuló legfeljebb két mérkőzést játszott volna, akkor eddig 10 mérkőzés zajlott volna le (2 pont)
Mivel 11 mérkőzés volt, ezért a skatulya-elv alapján lennie kell olyan tanulónak, aki 3 mérkőzést játszott. (2 pont)
- c) *Lásd: Statisztika 7. feladat*
- Összesen: 16 pont**
- 9) **Aladár, Béla, Csaba, Dani és Ernő szombat délutánonként együtt teniszeznek. Mikor megérkeznek a tenispályára, mindegyik fiú kezét fog a többiekkel.**
- a) **Hány kézfogás történik egy-egy ilyen közös teniszezés előtt? (3 pont)**
Legutóbb Dani és Ernő együtt érkeztek a pályára, a többiek különböző időpontokban érkeztek.
- b) **Hány különböző sorrendben érkezhettek ezen alkalommal? (3 pont)**
- c) **A fiúk mindig páros mérkőzést játszanak, kettő-kettő ellen. (Egy páron belül a játékosok sorrendjét nem vesszük figyelembe, és a pálya két tételét nem különböztetjük meg.)**
Hány különböző mérkőzés lehetséges? (6 pont)

Megoldás:

- a) A kézfogások száma $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ (3 pont)
- b) Lásd: Kombinatorika 19. feladat
- c) Lásd: Kombinatorika 19. feladat

Összesen: 12 pont

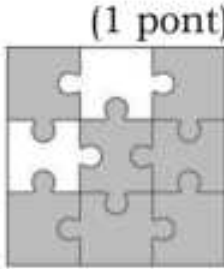
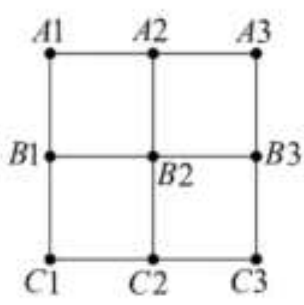
10) Az ábrán egy 3×3 -as kirakós játék (puzzle) sematikus képe látható. A kirakós játékot egy gráffal szemléltethetjük úgy, hogy a gráf csúcsai (A_1, A_2, \dots, C_3) a puzzle-elemeket jelölik, a gráf két csúcsa között pedig pontosan akkor vezet él, ha a két csúcsnak megfelelő puzzle-elemek közvetlenül (egy oldalban) kapcsolódnak egymáshoz a teljesen kirakott képben.



- a) Rajzolja fel a kirakós játék gráfját (a csúcsok azonosításával együtt), és határozza meg a gráfban a foksámok összegét! (3 pont)
- b) Igazolja, hogy a megrajzolt gráfban nincs olyan (gráfelméleti) kör, amely páratlan sok élből áll! (4 pont)
- c) A teljesen kirakott képen jelöljön meg a puzzle-elemek közül 7 darabot úgy, hogy a kirakósjáték általuk alkotott részlete (a részletnek megfelelő gráf) már ne legyen összefüggő! (2 pont)
- d) Hányféleképpen lehet a puzzle-elemek közül hármat úgy kiválasztani, hogy ezek a teljesen kirakott képen kapcsolódjanak egymáshoz (azaz mindhárom képrészlet közvetlenül kapcsolódják legalább egy másikhoz a kiválasztottak közül)? (Az elemek kiválasztásának sorrendjére nem vagyunk tekintettel.) (7 pont)

Megoldás:

- a) Ábra: (2 pont)
A foksámok összege $4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 = 24$. (1 pont)
- b) A gráf egy köre – az a) rész megoldásában megadott ábra szerint – 1, 2, 3 vagy 4 „négyzetből” álló sokszöget „keríthet körül”. (1 pont)
Ha a körbekerített négyzetek száma 1, 2, 3 vagy 4, akkor a kör éleinek száma rendre 4, 6, 8, 8, (2 pont)
tehát valóban nincs a gráfban páratlan sok élből álló kör.
- c) Például a puzzle A_2 és B_1 jelű darabját elhagyva a megmaradó 7 puzzle-elem által alkotott részlet nem lesz összefüggő. (2 pont)
- d) Lásd: Kombinatorika 41. feladat



Összesen: 16 pont

11) a) Döntse el, hogy igaz-e a következő kijelentés! Válaszát indokolja!
Van olyan G_1 , illetve G_2 fagráf, amelyre igaz, hogy a G_2 csúcsainak száma kétszerese a G_1 csúcsai számának, és a G_2 éleinek száma is kétszerese a G_1 élei számának. (A fagráfknak van legalább egy csúcsa.) (3 pont)
Az A, B, C, D, E, F kereskedőcégek mindegyike mind az öt másik céggel kötött egy-egy üzletet az előző hónapban (bármelyik két cég között pontosan egy üzletkötés jött létre). Az ellenőrző hatóság véletlenszerűen kiválaszt a hat cég előző havi (egymás közötti) üzletkötései közül négyet, és azokat ellenőrzi.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az A vagy a B cég üzletkötései közül is ellenőriznek legalább egyet? (6 pont)

Az egyik cég azzal bizott meg egy reklámügynökséget, hogy tervezzen egy nagy méretű, függőlegesen leomló hirdetővásznat a budapesti Lánchíd fő tartóláncának egy részére.



A híd két támpillérenek PV távolsága kb. 200 méter. A fő tartólánc alakja jó közelítéssel egy olyan (függőleges síkú) parabolának az íve, amelynek a tengelypontja a PV felezőpontja (U), a tengelye pedig a PV felezőmerőleges. A lánc tartópillérnél becsült legnagyobb magassága $PQ = 16$ méter, a vászon tervezett szélessége $PS = 50$ méter. A tervek szerint a QR íven felfüggesztett hirdetővászon az ábrán sötétített $PQRS$ területet fedi majd be (RS merőleges PS -re).

b) Hány m^2 területű vászon beszerzésére lesz szükség, ha a rögzítések miatt 8% veszteséggel számol a tervező? (7 pont)

Megoldás:

a) Az állítás hamis. (1 pont)

Ha G_1 csúcsainak száma n (n pozitív egész) és G_2 csúcsainak száma $2n$, akkor G_1 éleinek száma $n-1$, G_2 éleinek száma pedig $2n-1$, de $2(n-1) \neq 2n-1$.

b) Lásd: Valószínűségszámítás 44. feladat

c) Lásd: Síkgeometria 31. feladat

Összesen: 16 pont

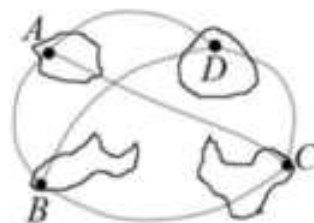
12) Öt különböző számjegyet leírunk egy papírlapra. Két számjegyet pontosan akkor kötünk össze egy vonallal (élel), ha különbségük páros szám (de egyik számjegyet se kötjük össze önmagával). Így egy ötpontú gráfot kapunk.

a) Határozza meg az alábbi két állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

I. Lehetséges, hogy fagrafot kapunk.

II. Lehetséges, hogy nem összefüggő gráfot kapunk. (4 pont)

Az Óceán Légitársaságnak a megalakulása óta alapelve, hogy a szigetvilágban működő hálózatnak bármely két célállomása között működtet repülőjáratot. (Az ábra azt a több évvel ezelőtti időszakot szemlélteti, amikor még csak négy célállomás és hat repülőjárat volt.)



A hálózatot folyamatosan bővítik: az utóbbi két év alatt a célállomások száma másfélszeresére nőtt, ugyanezen idő alatt a repülőjáratok száma pedig 60-nal lett több.

b) Hány célállomásra közlekednek jelenleg? (7 pont)

A légitársaság vezetőségi értekezletén megállapították, hogy az 1-es számú járatukon legfeljebb 168 utasnak van hely, de minden alkalommal sokkal többen szeretnének jegyet váltani. Több év tapasztalatai szerint 0,032 annak a valószínűsége, hogy erre a járatra valaki megveszi a jegyet, de aztán valamilyen ok miatt mégsem jelenik meg a járat indulásánál.

Emiatt a vezetőség úgy dönt, hogy erre a 168 fős járatra ezentúl 170 jegyet adnak el. Az érvényes szabályozás szerint a több jegy eladása miatt a járatról esetleg lemaradó utasoknak a légitársaság fejenként 600 euró kártérítést köteles fizetni.

- c) Ha a vezetőség megállapításai helyesek, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy az 1-es számú járat egy indulásánál legfeljebb 168 utas jelenik meg, és mennyi a társaság által fizetendő kártérítés várható értéke a járat egy útját tekintve? (5 pont)

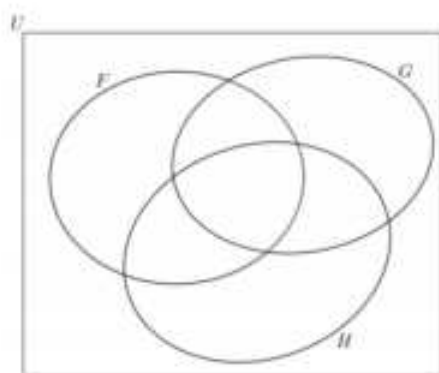
Megoldás:

- a) Az I. állítás **hamis**. (1 pont)
Az öt számjegy között biztosan lesz három azonos paritású, így az ezeknek megfelelő csúcsok egy hárompontú kört alkotnak a gráfban, ezért nem lehet fagráf. (1 pont)
A II. állítás **igaz**. (1 pont)
Egy megfelelő példa. Ha egy páros és négy páratlan számjegyet írunk le, akkor a páros számnak megfelelő csúcs a gráfban izolált pont lesz, ezért ez a gráf nem összefüggő. (1 pont)
- b) Lásd: Szöveges feladatok 27. feladat
c) Lásd: Valószínűségszámítás 48. feladat

Összesen: 16 pont

13) Legyen az U alaphalmaz a legalább 4 pontú egyszerű gráfok halmaza. Az F halmaz az U elemei közül pontosan azokat tartalmazza, amelyek fagráfok, a G halmaz pontosan azokat, amelyek összefüggő gráfok, a H halmaz pedig pontosan azokat, amelyek 6 pontú gráfok.

- a) Az alábbi ábrán satírozással jelölje meg, és halmazműveletekkel is adja meg az U -nak azt a részhalmazát, amelyik üres halmaz! (2 pont)
b) A megadott Venn-diagram minden egyes további részébe rajzoljon pontosan egy lehetséges gráfot! (5 pont)



Egy telephely K, L, M, N, P, Q épületei közül az éjszakai ellenőrzés során ötöt ellenőriz a biztonsági őr.

- c) Hányféleképpen tervezheti meg az útvonalát, ha K és L épületeket mindenképp ellenőrzi? (Két útvonal különböző, ha a két út során más épületeket, vagy ugyanazokat az épületeket, de más sorrendben ellenőriz a biztonsági őr.) (4 pont)

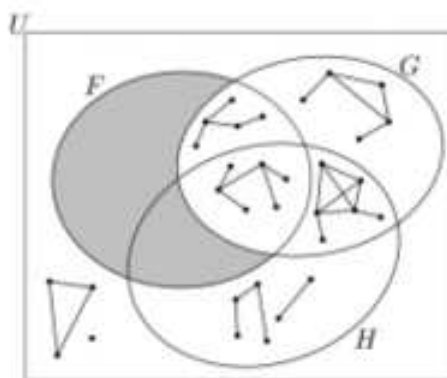
Megrajzoltuk a $ABCDE$ konvex ötszög oldalait és átlóit, majd a megrajzolt szakaszok mindegyikét vagy kékre, vagy zöldre színeztük. A színezés befejezése után észrevettük, hogy nincs olyan háromszög, amelynek csúcsai az A, B, C, D, E pontok közül valók, és mindhárom oldala azonos színű.

d) Igazolja (például indirekt módszerrel), hogy nincs olyan csúcsa az ötszögnek, amelyből legalább három azonos színű szakasz indul ki! (5 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Halmazok 12. feladat*

b) A Venn-diagram minden egyes további részében pontosan egy megfelelő gráf. Például:



(5 pont)

c) *Lásd: Halmazok 12. feladat*

d) *Lásd: Bizonyítások 28. feladat*

Összesen: 16 pont

14) Annának az IWIW-en 40 ismerőse van (Az IWIW weboldalon lehetőség van az egymást ismerő emberek kapcsolatfelvételére. Ebben a feladatban minden ismertséget kölcsönösnek tekintünk.)

Anna ismerőseinek mindegyike Anna minden többi ismerőse közül pontosan egyet nem ismer.

a) A szóba került 41 ember között összesen hány ismertség áll fenn?

(5 pont)

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Anna 40 ismerőse közül véletlenszerűen választva kettőt, ők ismerik egymást?

(5 pont)

c) Válasszunk most a 41 személy közül véletlenszerűen kettőt! Mennyi a valószínűsége, hogy nem ismerik egymást?

(6 pont)

Megoldás:

a) A 41 főből álló társaság ismertségi számát megkaphatjuk, ha összeadjuk Anna ismerőseinek és Anna 40 ismerőse egymás közti ismertséginek számát

(1 pont)

Anna ismeri a 40 ismerősét

(1 pont)

Anna 40 ismerősének mindegyik 38 embert ismer Annán kívül

(1 pont)

Így Anna 40 ismerősének $\frac{40 \cdot 38}{2} = 760$ ismertsége van egymás közt

(1 pont)

A 41 fő közt $40 + 760 = 800$ ismertsége van

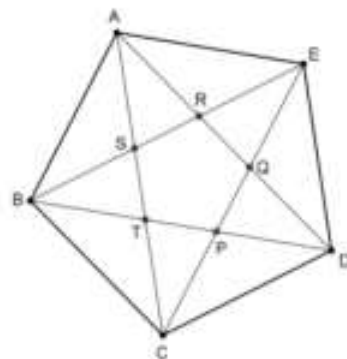
(1 pont)

b) *Lásd: Kombinatorika 7. feladat, Valószínűségszámítás 6. feladat*

c) *Lásd: Kombinatorika 7. feladat, Valószínűségszámítás 6. feladat*

Összesen: 16 pont

15) Megrajzoltuk az $ABCDE$ szabályos sokszöget, és berajzoltuk minden átlóját. Az átlók metszéspontjait az ábra szerint betűztük meg: P, Q, R, S, T .



- a) Hány olyan háromszög látható az ábrán, amelyek mindhárom csúcsa a megjelölt 10 pont közül való, és mindhárom oldalegyenese az $ABCDE$ ötszög oldalegyenesei és átlóegyenesei közül kerül ki? (8 pont)
- b) Tudjuk, hogy az $ABCQ$ négyszög területe 120 cm^2 . Mekkora az $ABCDE$ ötszög területe? Válaszát egész értékekre kerekítve adja meg! (4 pont)
- c) Tekintsük azt a tíz csúcsú gráfot, amelyet a megadott ábra szemléltet. Erről a gráfról fogalmaztunk meg két állítást. Állapítsa meg mindkét állításról, hogy igaz vagy hamis! Adjon rövid magyarázatot a válasza!
 1. állítás: Ennek a gráfnak 20 éle van.
 2. állítás: Ebben a gráfban van olyan részgráf, amely nyolc élű kör. (4 pont)

Megoldás:

- a) Lásd: Síkgeometria 9. feladat
- b) Lásd: Síkgeometria 9. feladat
- c) 1. állítás **IGAZ**, (1 pont)
 mert a 10 pont mindegyikének 4 a fokszáma, a fokszámok összege 40, ami az élek számának kétszerese (1 pont)
2. állítás **IGAZ** (1 pont)
 például $ABCDEQPTA$ egy nyolcpontú kör (1 pont)
- Összesen: 16 pont**

16) Adott négy, a valós számok halmazán értelmezett függvény:

$$f(x) = (x + 4)(2 - x)$$

$$g(x) = x + 4$$

$$h(x) = x^2 - 4$$

$$i(x) = |x| - 4$$

- a) Határozza meg az f és g függvények grafikonja által közrezárt korlátos síkidom területét! (7 pont)

Egy négy pontú gráf csúcsait megfeleltetjük e négy függvénynek. Két csúcsot pontosan akkor kötünk össze éllel, ha a két megfelelő függvénynek van közös zérushelye.

- b) Rajzolja fel az így kapott gráfot! (4 pont)

A valós számok halmazán értelmezett k függvény zérushelye -5 és 3 , az m függvény zérushelyei 3 és -3 , az n függvény zérushelyei pedig 5 és -5 .

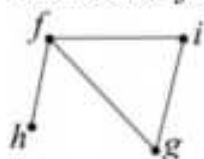
A p elsőfokú függvény hozzárendelési szabálya $p(x) = x + c$, ahol c egy valós szám.

- c) Hányféleképpen választható meg a c konstans értéke úgy, hogy a k, m, n és p függvényekre a b) feladatban megadott szabály szerint elkészített négy pontú gráf fagráf legyen? (5 pont)

Megoldás:

- a) Lásd: Függvények 45. feladat

- b) f zérushelyei -4 és 2, (1 pont)
 g zérushelye -4, (1 pont)
 h zérushelyei -2 és 2, (1 pont)
 i zérushelyei -4 és 4. (1 pont)



- c) (A p -nek egyetlen zérushelye lehet.) (1 pont)
 Fagráfban nincs izolált pont, ezért p zérushelye csak a k , m , és n zérushelyinek valamelyike lehet: 3, -3, 5 vagy -5. (1 pont)
 Ha a p zérushelye a 3 vagy a -5 lenne, akkor a gráfban létrejönne a k - p - m vagy a k - p - n kör.
 Ez tehát nem lehetséges. (1 pont)
 A -3 lehet a p zérushelye (ekkor $c = 3$). (1 pont)
 Az 5 lehet a p zérushelye (ekkor $c = -5$). (1 pont)
 Tehát a c konstans értéke **kétféleképpen** választható meg. (1 pont)

Alternatív megoldás:

Ha a p zérushelye a 3 vagy a -5 lenne, akkor a gráfban létrejönne a k - p - m vagy a k - p - n kör.

Ez nem lehetséges. (1 pont)

Ha a p zérushelye nem a 3 és nem a -5, akkor a p - m , illetve a p - n élek közül csak az egyik létezhet (mert p -nek csak egy zérushelye van, de m -nek és n -nek nincs közös zérushelye); az összefüggőség miatt az egyiknek léteznie is kell.

(2 pont)

A p zérushelye lehet -3, és lehet 5 is, tehát **kétféleképpen** választható meg a konstans értéke ($p(x) = x + 3$ vagy $p(x) = x - 5$).

(2 pont)

Összesen: 16 pont

- 17) **Egy nyomozás során fontossá vált felderíteni azt, hogy az A, B, C, D, E, F hattagú társaság mely tagjai ismerik egymást, azaz milyen a társaság ismeretségi hálója (ismeretségi gráfja). (Az ismeretség bármely két tag között kölcsönös. A társaság két ismeretségi hálója akkor különböző, ha van két olyan tag, akik az egyik hálóban egymásnak ismerősei, de a másikban nem.) A nyomozás során az már bizonyítottá vált, hogy A -nak 5, B -nek 4, C -nek 3 ismerőse van a társaságban. Ennél többet azonban nem sikerült kideríteni, így aztán D, E, F egymás közötti ismeretségeiről sincs még semmilyen információ.**

- a) **Hányféle lehet a D, E, F csoport ismeretségi hálója?**

A friss bizonyítékok szerint a D, E, F csoportban mindenki ismeri a másik két személyt. (3 pont)

- b) **Az összes eddigi (a korábban és a frissen beszerzett) információt figyelembe véve hányféle lehet az A, B, C, D, E, F hattagú társaság ismeretségi hálója?** (9 pont)

A további információk kiderítése érdekében a hattagú társaság tagjait 3 fős csoportokba szervezve hallgatják ki. Minden olyan 3 fős csoport kihallgatását megszervezik, amelyben A és B együtt nincs jelen.

- c) **Összesen hány ilyen csoportos kihallgatást kell szervezni?** (4 pont)

Megoldás:

- a) A $\{D, E, F\}$ részgráfban 3 él lehet. (1 pont)

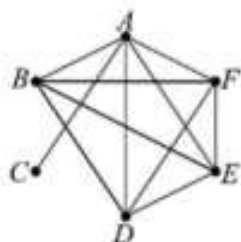
A 3 él bármelyike vagy szerepel a gráfban (ha a két személy ismeri egymást), vagy nem, (1 pont)

ezért $2^3 = 8$ -féle ismeretségi gráf (háló) lehetséges. (1 pont)

b) Az ismeretségi gráfban A ötödfokú pont, ezért minden más ponttal össze van kötve, továbbá a D, E, F pontok mindegyike össze van kötve a másik kettővel. Ez derüljön ki a megoldásból. (1 pont)

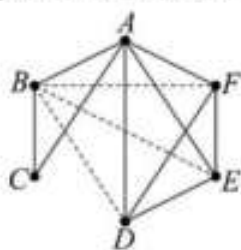
Ha a fentieknek megfelelő éleket berajzoljuk, akkor a B-ből még további 3, C-ből még további 2 élt kell meghúznunk. (1 pont)

Két esetet vizsgálunk aszerint, hogy a BC él benne van-e a gráfban, vagy sem. Ez derüljön ki a megoldásból. (1 pont)



I. eset: Ha a BC él nincs benne a gráfban, akkor a negyedfokú B pont össze van kötve a D, E, F pontok mindegyikével. Ez csak egyféleképpen lehetséges. (1 pont)

A harmadfokú C-ből kiinduló maradék 2 élt ekkor 3-féleképpen húzhatjuk be. Az I. esetben tehát 3 lehetőség van összesen. (C-t összekötjük a D, E, F pontok közül valamelyik kettővel)



II. eset: Ha a BC él benne van a gráfban, akkor a B-ből kiinduló maradék 2 élt 3-féleképpen húzhatjuk be (B-t összekötjük a D, E, F pontok közül valamelyik kettővel). (1 pont)

Szintén 3-féleképpen húzható be a C-ből induló harmadik él (C-t összekötjük a D, E, F pontok valamelyikével). (1 pont)

Ekkor $3 \cdot 3 = 9$ esetet kapunk.

c) Lásd: Kombinatorika 47. feladat

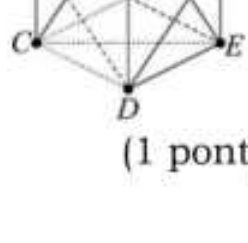
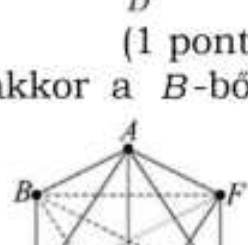
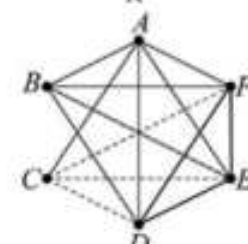
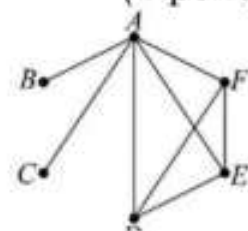
Alternatív megoldás:

a) Az ismeretségi gráfban az élek száma négyféle lehet: 0, 1, 2, 3. (1 pont)

Ezek rendre 1, $\binom{3}{1} = 3$, $\binom{3}{2} = 3$ illetve 1 lehetőséget jelentenek (1 pont)

Összesen $1 + 3 + 3 + 1 = 8$ lehetőség van. (1 pont)

b) A nyolc lehetséges ismeretségi gráf felrajzolása.



Összesen: 16 pont